# הגדרה

תהי הע"ל. נגדיר:

1. *הגרעין של T -*
2. *התמונה של T -*

## הערה

ת"מ, ת"מ.

# דוגמה

נמצא את הגרעין והתמונה של הה"ע שמוגדרת:

## פתרון

גרעין:

התמונה של T: יהי אזי קיים כך ש, כלומר קיים כך ש =>

מתקיים . זה לא מקרי

# הערה

תהי הע"ל. נניח ותהי A המטריצה המייצגת של T בבסיסים כלשהם. אזי:

# דוגמה(לא קשורה להערה האחרונה)

תהא הע"ל נתונה ע"י המטריצה (כלומר ). מצאו את הגרעין והתמונה של T.

## פתרון

? נדרג את A ונקבל:

הפתרון הוא ,

עמודות הציר הן עמודות 1 ו2(העמודות של המשתנים המובילים לאחר דירוג המטריצה) במטריצה המקורית, כלומר ,

# תרגיל(כן קשור להערה)

מצאו את הגרעין והתמונה של הע"ל הנתונה ע"י עבור .

## פתרון

נמצא את המטריצה המייצגת של בבסיסים הסטנדרטיים ונסמנה :

# תרגיל(2.3 עמ' 56)

תהא הע"ל. הוכיחו:

## פתרון

1. יהי אזי => =>
2. יהי אזי קיים כך ש => לכן קיים כך ש =>

# תרגיל 2.5

הוכיחו/הפריכו: יהיו הע"ל כך ש, , אזי .

## הפרכה

ניקח המוגדרות ע"י . ברור כי אבל

# תרגיל 2.9(עמ' 56)

תהא הע"ל המקיימת . יהיו . הוכיחו (V מ"ו מעל , )

## הוכחה

1) :

יהי ⇦ ולכן  
כמו כן ומכאן

מכאן => =>

2) נניח שלכל קיימים כך ש , אזי:

"קיבלנו" ⇦

נותר לבדוק ש

נבדוק רק את (\*):

לכן (\*) מתקיים

# משפט הדרגה

תאה הע"ל. אזי

## הערה

נניח ונסמן

נסמן מרחב האפס של המטריצה.

כעת ניתן לכתוב את משפט הדרגה באופן הבא:

# תרגיל 2.10 (עמ' 56)

תאה הע"ל. הוכיחו שהתכונות הבאות שקולות:

1. T חח"ע

## פתרון

ב⇦א: נניח בשלילה ש אזי קיים כך ש בסתירה לכך שT חח"ע.

א⇦ב: נניח שקיימים כך ש, אזי . מצד שני לכן ⇦ .

## מסקנה מהתרגיל

תאה הע"ל אזי T איזומורפיזם ⬄ וגם . בנוסף, אם אזי T על ⬄ T חח"ע.

### הוכחה

נניח T על. נשתמש במשפט הדרגה ⇦ ⇦ ⇦ג T חח"ע.ג

בפרט אם אזי T אופרטור הפיך ⬄ T חח"ע.

# תרגיל 2.13

1. האם קיימת הע"ל המקיימת ?
2. האם קיימת הע"ל המקיימת ?

## פתרון

1. הפרכה: נניח בשלילה כי קיימת הע"ל כזו אזי
2. כן! נגדיר את ההעתקה ע"י משפט ההגדרה:  
   לכן

# תרגיל 2.18

תהא הע"ל. הוכיחו שהתכונות הבאות שקולות:

## פתרון

נוכיח ב⇦א⇦ג⇦ב

ב⇦א: ראינו בתרגיל 2.3 שמתקיים . כדי להראות שוויון נראה שוויון מימדים: מתקיים:

א⇦ג: 1) יהי אזי וכן קיים כך ש. נפעיל T עך שני האגפים ונקבל ⇦ ⇦ ⇦ ⇦ ⇦

2) ? מתקיים   
לפי משפט המימדים:   
לכן . ממשפט הדרגה נקבל:

ג⇦ב: ראינו כבר . נראה את ההכלה השנייה.  
יהי אזי קיים כך ש. ע"פ ג' ניתן לכתוב ⇦  
 ⇦ כך ש ולכן . מ(\*) נקבל ⇦